Memo No.

Date / /

文科数学第九次作业解析

2.3.2 已知变量 x_1, x_2, x_3 由变量 y_1, y_2, y_3 线性表示为：

$$\begin{cases} x_1 = 2y_1 + 2y_2 + y_3 \\ x_2 = 3y_1 + y_2 + 5y_3 \\ x_3 = 3y_1 + 2y_2 + 3y_3 \end{cases}$$

试将变量 y_1, y_2, y_3 由变量 x_1, x_2, x_3 线性表出.

解：令 $X = [x_1, x_2, x_3]^T$ 和 $Y = [y_1, y_2, y_3]^T$，则

$$X = AY$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

简单计算 $|A| = 1 \neq 0$，从而 A^{-1} 存在，故由 $X = AY$ 知

$$Y = A^{-1}X$$

构造矩阵 (A, I) 求 A^{-1} 如下：

$$(A, I) = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[②+③\cdot(-1)]{①+②\cdot(-1)} \begin{bmatrix} -1 & 1 & -4 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{③+①\cdot(3)} \begin{bmatrix} -1 & 1 & -4 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & -9 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{③+②\cdot(5)} \begin{bmatrix} -1 & 1 & -4 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[②+③\cdot(-2)]{①+③\cdot(4)} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 13 & 7 & -16 \\ 0 & -1 & 0 & -6 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow[①\cdot(-1)\ \ ②\cdot(-1)]{①+②} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -7 & -4 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

因而

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}-7&-4&9\\6&3&-7\\3&2&-4\end{bmatrix}$$

所以，变量 y_1, y_2, y_3 由变量 x_1, x_2, x_3 线性表示为：

$$\begin{cases}y_1=-7x_1-4x_2+9x_3\\y_2=6x_1+3x_2-7x_3\\y_3=3x_1+2x_2-4x_3.\end{cases}$$

2.3.3 解下列线性方程组：

(1) $$\begin{cases}2x_1+3x_2-x_3=8\\x_1+x_2+x_3=7\\2x_2-x_3=3\end{cases}$$

解：对线性方程组的增广矩阵~~为~~做初等行变换：

$$\bar{A}=\begin{bmatrix}2&3&-1&8\\1&1&1&7\\0&2&-1&3\end{bmatrix}\xrightarrow{(①,②)}\begin{bmatrix}1&1&1&7\\2&3&-1&8\\0&2&-1&3\end{bmatrix}\xrightarrow{②+①\cdot(-2)}$$

$$\begin{bmatrix}1&1&1&7\\0&1&-3&-6\\0&2&-1&3\end{bmatrix}\xrightarrow{③+②\cdot(-2)}\begin{bmatrix}1&1&1&7\\0&1&-3&-6\\0&0&5&15\end{bmatrix}\xrightarrow{③\cdot(\frac{1}{5})}\begin{bmatrix}1&1&1&7\\0&1&-3&-6\\0&0&1&3\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[②+③\cdot(3)]{①+③\cdot(-1)}\begin{bmatrix}1&1&0&4\\0&1&0&3\\0&0&1&3\end{bmatrix}\xrightarrow{①+②\cdot(-1)}\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&3\\0&0&1&3\end{bmatrix}$$，从而 $\mathrm{rank}(\bar{A})=3$

~~即 未知方程~~ 故线性方程组有唯一解，其解为

$$\begin{cases}x_1=1\\x_2=3\\x_3=3.\end{cases}$$

(4) $\begin{cases} x_1 - x_3 - 2x_4 - 3x_5 = -2 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 = 4 \\ 2x_1 - 4x_2 + 6x_3 + 4x_4 - 2x_5 = 12 \end{cases}$

解：对线性方程组的增广矩阵做初等变换如下：

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & -3 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & -4 & 6 & 4 & -2 & 12 \end{bmatrix} \xrightarrow[③+①\cdot(-2)]{②+①\cdot(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & -4 & 8 & 8 & 4 & 16 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{③+②\cdot(-4)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & -4 & -4 & -4 & -8 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{\cancel{②+③} \\ ③\cdot(-\frac{1}{4})}]{\cancel{③\times(-4)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{①+③} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$，因此 $3 = r(\bar{A}) < 5$，故方程组无穷多解．其中有2个自由未知量．

方程组解为：

$$\begin{cases} x_1 = x_4 + 2x_5 \\ x_2 = -x_5 \\ x_3 = 2 - x_4 - x_5 \end{cases}$$ 其中 x_4, x_5 为自由未知量．

(8) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 2 \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 - 3x_4 - x_5 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 - 4x_5 = 2 \end{cases}$

解：对线性方程组增广矩阵做初等变换如下：

$$\bar{A}=\begin{bmatrix}1&2&3&-1&0&2\\2&4&5&-3&-1&3\\1&2&3&-3&-4&2\end{bmatrix}\xrightarrow[③+①\cdot(-1)]{②+①\cdot(-2)}\begin{bmatrix}1&2&3&-1&0&2\\0&0&-1&-1&-1&-1\\0&0&0&-2&-4&0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[①+③]{③\cdot(-\frac{1}{2})}\begin{bmatrix}1&2&3&0&2&2\\0&0&-1&0&1&-1\\0&0&0&1&2&0\end{bmatrix}\xrightarrow[①+②\cdot(-3)]{②\cdot(-1)}\begin{bmatrix}1&2&0&0&5&-1\\0&0&1&0&-1&1\\0&0&0&1&2&0\end{bmatrix}$$

因而 $3=\mathrm{rank}(\bar{A})<5$，故线性方程组无穷多解且有2个自由未知量。

故线性方程组解为:

$$\begin{cases}x_1=-2x_2-5x_5-1\\x_3=x_5+1\\x_4=-2x_5\end{cases}$$ ，其中 x_2，x_5 为自由未知量.

(11) $$\begin{cases}x_1+3x_2+x_3+2x_4=4\\3x_1+10x_2+2x_3+x_4=6\\2x_1+7x_2+x_3+6x_4=6\\2x_1+5x_2+3x_3+2x_4=10\end{cases}$$

解：对线性方程组增广矩阵做初等变换如下：

$$\bar{A}=\begin{bmatrix}1&3&1&2&4\\3&10&2&4&6\\2&7&1&6&6\\2&5&3&2&10\end{bmatrix}\xrightarrow[④+①\cdot(-2)]{②+①\cdot(-3),\ ③+①\cdot(-2)}\begin{bmatrix}1&3&1&2&4\\0&1&-1&-2&-6\\0&1&-1&2&-2\\0&-1&1&-2&2\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[③+②\cdot(-1)]{④+③}\begin{bmatrix}1&3&1&2&4\\0&1&-1&-2&-6\\0&0&0&4&4\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow[①+③\cdot(-2),\ ①+②\cdot(-3)]{③\cdot(\frac{1}{4}),\ ②+③\cdot(2)}\begin{bmatrix}1&0&4&0&14\\0&1&-1&0&-4\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

因此 $3=\mathrm{rank}(\bar{A})<4$，故线性方程组无穷多解，且有一个自由未知量.

故线性方程组解为：

$$\begin{cases} x_1 = -4x_3 + 14 \\ x_2 = x_3 - 4 \\ x_4 = 1 \end{cases}$$，其中 x_3 为自由未知量。

2.3.4 解下列齐次线性方程组.

(1) $$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0 \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 0 \end{cases}$$

解：对系数矩阵做初等变换：

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 5 & 3 \\ 3 & -6 & 4 & 2 \\ 4 & -8 & 17 & 11 \end{bmatrix} \xrightarrow[③+①\cdot(-2)]{②+①\cdot(-1)} \begin{bmatrix} 2 & -4 & 5 & 3 \\ 1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 7 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[②+①\cdot(-2)]{\text{两行互换 }(①,②)} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 7 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{②\cdot(\frac{1}{7}) \\ ①+②\cdot 1}]{③+②\cdot(-1)} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -\frac{2}{7} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

因而 $2 = \mathrm{rank}(A) < 4$，故齐次线性方程组有无穷多解，且有2个自由未知量.

故齐次线性方程组解为：

$$\begin{cases} x_1 = 2x_2 + \frac{2}{7}x_4 \\ x_3 = -\frac{5}{7}x_4 \end{cases}$$，其中 x_2, x_4 为自由未知量.

(5) $$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 - x_3 + 5x_4 - x_5 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 0 \end{cases}$$

解：对系数矩阵做初等变换：

$$A=\begin{bmatrix}1&-1&-2&3&2\\3&-3&-1&5&-1\\2&-2&1&2&-3\end{bmatrix}\xrightarrow[③+①\cdot(-2)]{②+①\cdot(-3)}\begin{bmatrix}1&-1&-2&3&2\\0&0&5&-4&-7\\0&0&5&-4&-7\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{②\cdot(\frac{1}{5})\\①+②\cdot(2)}]{③+②}\begin{bmatrix}1&-1&0&\frac{7}{5}&-\frac{4}{5}\\0&0&1&-\frac{4}{5}&-\frac{7}{5}\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

因而 $2=\mathrm{rank}(A)<5$，故方程组无穷多解，且含有3个自由未知量.

所以，齐次线性方程组解为:

$$\begin{cases}x_1=x_2-\frac{7}{5}x_4+\frac{4}{5}x_5\\x_3=\frac{4}{5}x_4+\frac{7}{5}x_5\end{cases}$$，其中 x_4，x_5，x_2 为自由未知量.

2021.12.22.

[注]：本次作业主要考查了矩阵求逆以及矩阵的初等变换，而线性方程组求解本质上为矩阵的初等变换.

注意事项:

1. 矩阵初等变换之间不能使用"="，应该使用"→"表示.
2. 一般矩阵初等变换要把矩阵化到简化阶梯型矩阵
3. 矩阵求逆，首先判断该矩阵是否可逆，再求逆.